# PROGRAMME D'ETUDE DE LA CLASSE DE 1ière A&B

## SA N°1 : ORGANISATIONS DES DONNÉES

1. Équations et Inéquations du second degré
2. Systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues
3. Systèmes d'inéquations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
4. Suite arithmétique
5. Suite géométrique
6. Statistiques
7. Dénombrement

## SA N°2 : LIEUX GÉOMÉTRIQUES

1. Fonctions – Applications
2. Notion de limite
3. Continuité
4. Dérivation

*Auteur :*

**Adekoulé Emmanuel ILEDI**

*Professeur Adjoint*

Professeur permanent au CSP ACADEMIA/Parakou
Tel : (+229) 67 39 92 89/ 95371389
E-mail : iledi.emmanuel@yahoo.fr

*Version* : **SEPTEMBRE 2021**

# SA N°1 : ORGANISATION DES DONNÉES

## Situation de départ

**Texte : Projet « habitat sûr »**

Un soir, Mimi une élève en classe de $1^{ère}$ surprend une conversation entre son père et sa mère :

- Ma chérie il est tant que nous épargnons un peu de nos revenus pour construire notre propre maison; l'entrepreneur m'a dit qu'il nous faut prévoir 8.000.000 de francs CFA alors que je ne gagne que 280.000 FCFA par mois.
- Tu as raison mon chéri ; moi je sais que mon commerce peut me rapporter par mois 320.000 FCFA mais compte tenu du marché je ne peux le faire que pour un an. Comment allons-nous procéder ? Prenons peut être conseil chez notre fille pendant qu'elle est là.

Mimi leur propose de définir chacun une somme à épargner tous les mois pendant un an et de faire en suite des placements sur un certain nombre d'année. Son père trouve la proposition intéressante mais souhaite placer son argent dans une banque qui pratique un taux d'intérêt tel qu'en deux ans il aurait au moins les $\frac{30}{27}$ de ce qu'il a déposé. Sa mère très contente dit à son mari : « Moi j'épargnerai chaque mois le triple de mon épargne mensuelle habituelle pour que déjà à la fin de l'année nous dépassions ensemble 1.800.000 FCFA; de plus je n'irai pas vers une banque mais je passerai mon argent à mes amies commerçantes à qui je demanderai un intérêt annuel fixe ».

Mimi est alors chargée de faire une enquête sur les taux d'intérêt pratiqués par les banques de la sous-région et de planifier le projet de ses parents ; mais elle se demande comment s'y prendre.

**Tâche :** Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique ; pour cela, tu auras, tout au long de la S.A., à :

- Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés ;
- Analyser chacun des problèmes ;
- Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème ;
- Améliorer au besoin ta production.

# Séquence n°1 : Equations et inéquations du second degré

## 1.1 Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

### Activité 1.1

Mimi désire écrire une expression traduisant le montant de l'épargne de son papa. Elle désire aussi écrire une relation mathématique lui permettant de déterminer son gain journalier. Si on désignait par X son gain journalier.

### 1.1.1 Polynômes du second degré – Equation du second degré dans $\mathbb{R}$

### Consigne 1.1

1. Précise le carré de son gain.
2. Donne le double du gain.
3. On considère les expressions suivantes : $-800$ ; $20X$ et $X^2$
4. Donne l'expression traduisant l'épargne (E) de ce papa sachant qu'elle fait la somme des expressions citées ci-dessus puis nomme l'expression obtenue.
5. Ecrire une expression mathématique permettant de calculer le montant du gain X sachant que l'épargne du papa de Mimi est 500 puis nomme l'expression obtenue.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### Définition

$x$ est une variable réelle et $a, b$ et $c$ sont des réels tel que $a \neq 0$.

Un polynôme de forme réduite $P(x) = ax^2 + bx + c$ est appelé **polynôme du second degré.**

### Vocabulaire

- Le coefficient du monôme de degré 2 est $a$ ;
- Le coefficient du monôme de degré 1 est $b$ ;
- Le coefficient du monôme de degré 0 est $c$.

### 1.1.2 Identification des coefficients d'un polynôme

### Consigne 1.2

$P(x)$ est un polynôme du second degré tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Remplir le tableau suivant :

| $P(x)$ | $-3x^2 + 1$ | $2x^2 + x$ | $5x^2 + x + 1$ | $4x^2 - x\sqrt{3} + 1$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | | |
| $b$ | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| c | | | | |

**Stratégies et durée : TI : 3min TC : 5min**

### 1.1.3 Forme canonique d'un polynôme du second degré

**Consigne 1.3**

On considère le polynôme du second degré définit par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

L'expression $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelée **forme canonique de $P(x)$.**

Tu vas retrouver la forme canonique de $P(x)$ en suivant les consignes ci-dessous.

1. Mets en facteur le réel $a$ dans l'expression $P(x) = ax^2 + bx + c$ sachant que $a \neq 0$.
2. Développe l'expression $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
3. A partir du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, tire l'expression $x^2 + \frac{b}{a}x$.
4. Remplace $x^2 + \frac{b}{a}x$ par son expression dans $P(x)$ puis retrouve la forme canonique de $P(x)$.

**Stratégies et durée: TI : 4min TC : 7min**

**Retenons**

Tout polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

On dit qu'on a écrit la **forme canonique** de $P(x)$.

**Application 1.1**

Détermine la forme canonique de chacun des polynômes ci-après

a) $E(x) = x^2 + 20x - 800$
b) $Q(x) = -3x^2 + 5x + 3$
c) $K(x) = 2x^2 + 2x + 1$
d) $G(x) = -x^2 - x + 2$

**Stratégies et durée : TI : 4min TC : 10min**

### 1.1.4 Discriminant d'un polynôme du second degré

**Consigne 1.4**

1. Mets $P(x)$ sous la forme canonique $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \beta\right]$.
2. Extrais l'expression du numérateur de $\beta$. Cette expression est appelée **« discriminant de $P(x)$»** et on note **Δ.**

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

**Retenons : Discriminant d'un polynôme**

Pour écrire un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ sous forme canonique, on également utiliser la formule suivante :

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ avec $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$

Le nombre Δ est appelé **discriminant** de $P(x)$.

**Application 1.2**

Calculer le discriminant de chacun des polynômes suivants :

(a) $A(x) = x^2 - 12x - 28$
(b) $B(y) = -2y^2 + 2y - 5$
(c) $C(z) = z^2 - 10z$

**Stratégies et durée : TI : 4min TC : 5min**

### 1.1.5 Racines d'un polynôme du second degré

**Consigne 1.5**

Soit $G(x)$ un polynôme du second degré définit par $G(x) = x^2 - x - 2$ et $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

1. Calcule le discriminant Δ de $G(x)$.
2. Détermine les réels $x_1$ et $x_2$.
3. Calcule $G(x_1)$ et $G(x_2)$ et dis ce que tu constates.

**Information**

On dit que $x_1$ et $x_2$ sont des racines de $G(x)$.

**Stratégies et durée : TI : 4min TC : 5min**

**Retenons**

Pour déterminer les racines d'un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ on peut :

- calculer son discriminant $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$
- utiliser le tableau suivant :

| Discriminant | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| Racines | $P(x)$ n'a pas de racine réelle | $P(x)$ a une racine double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ | $P(x)$ a deux racine distincts : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |

**Remarque**

Si les coefficients $a$ et $c$ sont de signe contraire, alors $\Delta > 0$ donc $P(x)$ admet deux racine distinctes.

**Application 1.3**

Soit les polynômes du second degré suivants :

$F(x) = 2x^2 + 2x - 4$ ; $Q(x) = x^2 + x + 1$ et

$Z(x) = 2x^2 - 4x + 2$

1. Calcule si possibles les racines de chacun de ces polynômes.
2. Que constates-tu par rapport à la valeur du discriminant et des racines de ces polynômes ?

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

### 1.1.6 Factorisation d'un polynôme du second degré à l'aide de ses racines

**Consigne 1.6**

On considère le polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et soient $x_1$ et $x_2$ les racines évidents de ce polynôme.

**Information**

L'expression $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ est appelée **la forme factorisée de $P(x)$**.

Factorise alors si possible les polynômes suivants :

(a) $P(x) = x^2 - x + 1$
(b) $Q(x) = x^2 + x - 3$
(c) $R(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

**Retenons : Factorisation d'un polynôme du second degré**

Pour factoriser un polynôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c = 0$, on peut :

- calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
- utiliser le tableau ci-dessous :

| Discriminant | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| Forme factorisée | $P(x)$ n'est pas factorisable | $P(x) = a(x - x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$ | $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ |

**Application 1.4**

Dans chacun des cas suivants, factorise si possible le polynôme du second degré $P(x)$

(a) $P(x) = x^2 + 6x - 7$
(b) $P(x) = x^2 - 8x + 17$
(c) $P(x) = 2x^2 + 4x + 6$
(d) $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

### 1.1.7 Résolution d'une équation du second degré à l'aide du discriminant

**Retenons : Résolution d'une équation du second degré**

Pour résoudre une équation du second degré $(E): ax^2 + bx + c = 0$, on peut :

- calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
- utiliser le tableau suivant :

| Discriminant | $\Delta < 0$ | $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ |
|---|---|---|---|
| Solutions | $(E)$ n'a pas de solution et on écrit $S_{\mathbb{R}} = \{\}$ ou $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ | $(E)$ a une solution double $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et on écrit $S_{\mathbb{R}} = \{x_0\}$ | $(E)$ a deux solutions distincts : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et on écrit $S_{\mathbb{R}} = \{x_1; x_2\}$ |

**Consigne 1.7**

A l'aide du discriminant, résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes : $(E_1): x^2 - 2x + 2 = -1$ ; $(E_2): 2x^2 - 5x + 3 = 0$ et $(E_3): 2x^2 - 4\sqrt{3}x = -6$

### 1.1.8 Problème conduisant à une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

**Consigne 1.8**

Un champ rectangulaire est tel que sa longueur vaut 5m de plus que sa largeur et l'aire de sa surface est 1800m2.

1. En désignant par x la longueur du terrain, exprime sa largeur en fonction de $x$.
2. Montre que $x(x + 5) = 1800$.
3. Détermine les dimensions de ce champ.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

### 1.1.9 Résolution d'une équation du troisième degré

**Consigne 1.9**

On donne le polynôme suivant : $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$

1. (a) Calcule $P(1)$ et $P(0)$.

**Information**

Soit $\alpha$ un réel.

Si $P(\alpha) = 0$ alors $\alpha$ est une racine de $P(x)$.

(b) Que représente 1 pour $P(x)$ ?

2. Vérifie que pour tout réel $x$, $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1)(x^2 + 2x - 8)$
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$.
4. Factorise $x^2 + 2x - 8$.
5. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

**Stratégies : TI : 5min TC : 10min**

**Retenons**

Soit $P(x)$ un polynôme du troisième degré tel que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et $\alpha$ un réel

- $\alpha$ est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$
- Si $\alpha$ est une racine de $P(x)$, alors $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme du second degré. On détermine $Q(x)$ par les méthodes d'identification des coefficients de $P(x)$ ou de division euclidienne.

**Application 1.5**

Soit $h(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 9$

1. Calcule $h(3)$ puis $h(1)$.
2. Ecrire $h(x)$ sous la forme de produit de facteur premier 1er degré.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $h(x) = 0$.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

**Application 1.6**

Soit l'équation $(E) : x^3 + 2x + 3 = 0$,

1. Vérifie que $-1$ est une solution de $(E)$.
2. Vérifie l'égalité : $x^3 + 2x + 3 = (x + 1)(x^2 - x + 3)$.
3. Résoudre alors $(E)$.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

### 1.1.10 Somme et produit des solutions d'un polynôme du second degré

**Consigne 1.10**

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ où $a, b$ et $c$ sont des réels avec $a \neq 0$ et dont le discriminant $\Delta$ est supérieur ou égal à 0. On désigne par $x_1$ et $x_2$ les solutions de cette équation.

1. Justifie que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
2. Justifie que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

**Propriété**

Si l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions $x_1$ et $x_2$, alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

**Consigne 1.11 : Conséquence de la propriété**

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b$ et $c$ des réels tels que $a \neq 0$.

Démontre que pour $\Delta > 0$, $P(x) = 0$ équivaut à : $x^2 - Sx + P = 0$ où $S$ et $P$ sont respectivement somme et produit des solutions de $P(x) = 0$.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

**Propriété**

Soit l'équation du second degré $(E)$ : $ax^2 + bx + c = 0$ ; $x_1$ et $x_2$ deux réel tels que $P = x_1 \times x_2$ et $S = x_1 + x_2$

$x_1$ et $x_2$ sont deux solutions de $(E)$ si et seulement si $x^2 - Sx + P = 0$.

**Application 1.7**

**Ayomidé** dispose d'un terrain rectangulaire de 300 $m^2$ de superficie et de 70 $m$ de périmètre. Détermine les dimensions de ce terrain.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

### 1.1.11 Equations bicarrées

**Définition**

On appelle **équation bicarrée**, une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ avec $a \neq 0$

**Consigne 1.12**

On considère les équations suivantes : $(E_1)$ : $4t^2-8t+3=0$ ; $(E_2)$: $4x^4-8x^2+3=0$ et $(E_3)$: $3x^4-27x^2=0$.

1. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $(E_1)$.
2. (a) En posant $t=x^2$, justifie que l'équation $(E_2)$ devient $4t^2-8t+3=0$.(b) Déduis-en la résolution de l'équation $(E_2)$ dans $\mathbb{R}$.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_3)$.

**Stratégies : TI : 4min  TC : 5min**

## 1.2 Inéquation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

### 1.2.1 Etude de signe d'un polynôme du second degré

**Retenons**

Soit le polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$.

Le discriminant de $P(x)$ est le nombre $\Delta= b^2-4ac$.

On a : $P(x)=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

L'expression de la forme canonique de montre que l'étude de signe d'un polynôme du second degré dépend du signe de son discriminant. Examinons quelques cas dans les consignes suivantes :

**Consigne 1.13 : Le discriminant est négatif**

Soit $P(x)=x^2-2x+3$

1. Calcule le discriminant de $P(x)$.
2. Ecris sous forme canonique $P(x)$.
3. Justifie que pour tout nombre réel $x$, $P(x)>0$.

**Stratégies : TI : 4min  TC : 5min**

**Retenons**

Soit le polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$

Lorsque le discriminant $\Delta$ **est inférieure à zéro**, alors le **signe de $P(x)$ est celui de $a$**

**Consigne 1.14 : Le discriminant est nul**

On considère le polynôme $Q(x)=4x^2-20x+25$.

1. Calcule le discriminant de $Q(x)$.
2. Justifie que $Q(x)=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$.
3. Etudie le signe $Q(x)$.

**Stratégies : TI : 4min  TC : 5min**

**Retenons**

Soit le polynôme du second degré

$P(x)=ax^2+bx+c$

Lorsque le discriminant $\Delta$ **est égal à zéro**, alors le **signe de $P(x)$ est celui de $a$**

**Consigne 1.15 : Le discriminant est positif**

Soit le polynôme $S(x)=2x^2+5x-3$

1. Calcule le discriminant de $S(x)$.
2. Justifie que pour $x\in\mathbb{R}$, $S(x)=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$.
3. Etudie le signe de $S(x)$.

**Stratégies : TI : 4min  TC : 5min**

**Retenons**

Soit le polynôme du second degré $P(x)=ax^2+bx+c$

Pour étudier le signe de $P(x)$, on peut calculer son discriminant et utiliser l'un des tableaux suivants :

| $\Delta<0$ $P(x)$ n'a pas de racine | | |
|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| Signe de $P(x)$ | signe de $a$ | |

| $\Delta=0$ $P(x)$ a une racine double $x_0=-\frac{b}{2a}$ | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| Signe de $P(x)$ | signe de $a$ | 0 | signe de $a$ |

| $\Delta>0$ $P(x)$ a deux racines distinctes $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
| Signe de $P(x)$ | signe de $a$ | 0 | signe de $-a$ | 0 signe de $a$ |

**Application 1.8**

Etudie, suivant les valeurs de $x$, le signe du polynôme $P(x)$ dans les cas suivants :

(a) $P(x)=4x^2-x+1$

(b) $P(x)=-2x^2+7x-3$

(c) $P(x)=-9x^2+6x-1$

(d) $P(x)=x^2-5x+6$

**Stratégies : TI : 4min  TC : 8min**

### 1.2.2 Résolution d'une inéquation du second degré

**Consigne 1.15**

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$(I_1) : 9 - x^2 \geq 0$

$(I_2) : 2x^2 - x - 3 > 0$

$(I_3) : -x^2 - x - 5 < 0$

$(I_4) : 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

**Stratégies : TI : 4min TC : 10min**

### 1.2.3 Résolution graphique d'une inéquation du second du second degré

**Consigne 1.16**

On considère l'inéquation du second degré $(I) : x^2 - x - 2 \leq 0$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la parabole d'équation $y = x^2$ et par $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Trace $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ dans un même repère orthonormé.
2. (a) justifie que $(I) \Leftrightarrow x^2 \leq x + 2$.
   (b) Déduis alors graphiquement l'ensemble $F$ des solutions de $(I)$.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 1.2.4 Résolution d'une inéquation bicarrée

**Définition**

On appelle **inéquation bicarrée**, une inéquation ayant l'une des forme : $ax^4 + bx^2 + c \leq 0$ ; $ax^4 + bx^2 + c < 0$ ; $ax^4 + bx^2 + c \geq 0$ et $ax^4 + bx^2 + c > 0$

**Consigne 1.17**

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(I) : x^4 + x^2 - 2 \leq 0$.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

## Séquence 2 : Système d'équation et d'inéquation à deux inconnues dans $\mathbb{R}^2$

### 2.1 Système d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

**Activité 1.2**

Dans le souci de réaliser leur projet, la maman de Mimi désire prendre du sable et de gravier. Elle constate que ce que son commerce lui rapporte par mois peut acheter exactement 6 voyages de sable et 4 voyages de gravier. De plus ce bénéfice mensuel permet d'acheter un voyage de sable et 6 voyages de gravier.

### 2.1.1 Système d'équations linéaires à deux inconnues

**Consigne 2.1**

On désigne par $x$ le prix d'un voyage de gravier et par $y$ celui d'un voyage de sable.

Traduis sous forme de système d'équations linéaires les informations données.

**Stratégies : TI : 4min TC : 5min**

**Définition**

Un système d'équations linéaires à deux inconnues est un système comprenant deux équations linéaires à deux inconnues.

### 2.1.2 Résolution graphique d'un système de deux équations linéaire dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

**Consigne 2.2**

On suppose que les $x$ et $y$ exprimés en dizaine de milliers de francs vérifient le système :

$(S) : \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 6x + y = 32 \end{cases}$ et on désigne par $(D_1)$ et $(D_2)$ les droites d'équations respectives $2x + 3y = 16$ et $2x + 3y = 16$

1. Trace dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ les droites $(D_1)$ et $(D_2)$.
2. (a) Détermine graphiquement les coordonnées du point d'intersection A des droites $(D_1)$ et $(D_2)$. (Tu viens de résoudre graphiquement le système $(S)$)
   (b) Déduis – en le prix d'un voyage de gravier et de sable.

**Stratégies : TI : 4min TC : 7min**

### 2.1.3 Résolution d'un système de deux équations linéaire par la méthode de substitution et de combinaison

**Consigne 2.3**

Résous dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système de la consigne 2.2 par :

(a) la méthode de combinaison ou d'addition.

(b) la méthode de substitution.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 2.1.4 Résolution d'un système de deux équations linéaire par changement de variable

**Consigne 2.4**

On considère le système $(S')$: $\begin{cases} 4x + 3\sqrt{y} = 16 \\ 12x + \sqrt{y} = 32 \end{cases}$

1. En posant $a = 2x$ et $b = \sqrt{y}$, donne un système équivalent à $(S')$ et dont les inconnues sont $a$ et $b$.
2. Déduis-en le couple $(x, y)$ solution de $(S')$.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 7min**

**Application 1.9**

Résous les systèmes d'équations suivants :

$(S_1)$: $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ -x + 3y = -2 \end{cases}$ ; $(S_2)$: $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ et

$(S_3)$: $\begin{cases} \frac{2}{x+2} + \frac{5}{y-1} = 3 \\ -\frac{1}{x+2} + \frac{3}{y-1} = -2 \end{cases}$

**Stratégies et durées TC : 9min**

## 2.2 Système d'inéquation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

**Activité 1.3**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$. $(\mathscr{D})$ est la droite d'équation $x + y - 1 = 0$ ; $(P_1)$ et $(P_2)$ les demi – plans définit par $(P_1): x + y - 1 > 0$ et $(P_2): x + y - 1 < 0$ ; A(2 ; 1) est un point du plan.

### 2.2.1 Découpage du plan

**Consigne 2.5**

1. Trace la droite $(\mathscr{D})$ dans le repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ puis place le point A.
2. (a) justifie que $A \in (P_1)$.
   (b) Justifie que $A \notin (P_2)$.
3. En te servant du point A, identifie les demi – plans $(P_1)$ et $(P_2)$.

**Définition**

Un système d'inéquations linéaires à deux inconnues est un système comprenant deux inéquations à deux inconnues.

**Propriété**

Le plan est muni d'un repère (O; I; J). Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

- La droite $(\mathscr{D})$ partage le plan en trois parties :
  - La droite $(\mathscr{D})$
  - Les deux demi-plans ouverts $(P_1)$ et $(P_2)$ de frontières $(\mathscr{D})$
- Les couples de coordonnées (x; y) des points de $(\mathscr{D})$ vérifient $ax + by + c = 0$
- Les couples de coordonnées (x; y) des points d'un demi-plan vérifient $ax + by + c > 0$
- Les couples de coordonnées (x; y) des points de l'autre demi – plan vérifient $ax + by + c < 0$

### 2.2.2 Résolution d'un système de deux inéquations linéaires à deux inconnues

**Consigne 2.6**

On considère le système d'inéquations $(S)$: $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ -2x + y \geq 0 \end{cases}$ et désigne par $(\mathscr{D})$ et $(\Delta)$ les droites d'équations respectives $x + y - 1 = 0$ et $-2x + y = 0$

1. Trace dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ les droites $(\mathscr{D})$ et $(\Delta)$.
2. Déduis – en la partie des solutions du système $(S)$.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Application 1.10**

Résous les systèmes d'inéquations suivants :

$(S_1)$: $\begin{cases} 3x - 2y \leq 0 \\ x - 2y \geq -1 \end{cases}$ et $(S_2)$: $\begin{cases} x - 3y - 5 \geq 0 \\ 2x + y < 2 \end{cases}$

**Stratégies et durées : TC : 8min**

### 2.2.3 Programmation linéaire

**Activité 1.4**

Un fournisseur de produits de quincaillerie est sollicité pour vendre à la famille deux types de gons de sécurisation. Le 1er type est à un pincé et le second à deux pincés. Il vend au plus 100 gons par jour et dans son approvisionnement journalier on note 150 pincés

Un gon à pincé rapporte 50F et celui à deux pincés rapporte 70F.

On désigne par $x$ et $y$ les nombres respectifs de gons à un pincé et à deux pincés vendus par jour.

**Consigne 2.7**

1. Donne l'ensemble auquel appartiennent $x$ et $y$.

2. Justifie que $x$ et $y$ vérifient le système d'inéquations : $(S):\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 100 \\ x+2y \leq 150 \end{cases}$
3. Résous graphiquement le système $(S)$. (hachure la région ne contenant pas les solutions)
4. (a) Exprime en fonction de $x$ et $y$, le bénéfice journalier B réalisé par ce fournisseur.
   (b) Détermine le bénéfice journalier maximal.

**Stratégies et durées : TI : 5min TC : 8min**

### Application 1.11

Pour mettre en œuvre une bonne politique d'épargne, les parents de Mimi décident de créer une petite affaire. Ils décident de fabriquer deux types de biscuits A et B à l'aide de deux machines $M_1$ et $M_2$. Chaque carton de biscuit en cours de fabrication doit passer successivement ans les deux machines.

**Informations :** La machine $M_1$ est disponible 3000 min/mois et la machine $M_2$ 2000 min/mois

**Durée de passage d'un carton de biscuit A :**

- Dans la machine $M_1$ cette durée est égale à 30 min.
- Dans la machine $M_2$ cette durée est égale à 40 min.

**Durée de passage d'un carton de biscuit B :**

- Dans la machine $M_1$ cette durée est égale à 20 min.
- Dans la machine $M_2$ cette durée est égale à 10 min.

1. Traduis les informations de l'activité dans un tableau.
2. Traduis ces informations sous forme d'un système d'inéquation.
3. Détermine l'ensemble solution de ce système ;
4. Détermine la production qui assure un profit maximal sachant que le carton A est vendu à 400F et le carton B vendu à 200F.

**Stratégies et durées : TC : 10min**

## Séquence 3 : Suites arithmétiques–Suites géométriques

### 3.1 Suite numérique

**Définition**

On appelle suite numérique, toute fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$

**Notation et vocabulaire**

Soit E l'ensemble de définition d'une suite numérique $U$.

**Notation fonctionnelle**

$U : \begin{matrix} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto U(n) \end{matrix}$

**Notation indicielle**

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement $U(n)$ est appelé terme d'indice $n$ ou terme général.

Le $n^{ième}$ terme est appelé terme de rang $n$

**Exemple** : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définit par $U_n = 2n+5$

#### 3.1.1 Suite définie par une formule explicite

**Définition**

Une suite définie par une formule explicite est une suite dont son terme général est fonction du rang $n$.

**Exemple** : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $U_n = \frac{4n-1}{n}$

**Consigne 3.1**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définit par $U_n = 4-2n$

(a) Détermine les cinq termes de la suite $(U_n)$.
(b) Détermine le dixième terme de cette suite.

#### 3.1.2 Suite définie par une formule de récurrence

**Définition**

Une suite est définie par une formule de récurrence lorsque le terme initial est connu et chaque terme est fonction du terme précédent.

**Exemple** : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $U_0 = \frac{1}{2}$ et la formule $U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2}$ et on écrit : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2} \end{cases}$

**Consigne 3.2**

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définit par $\begin{cases} V_0 = 6 \\ V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 2 \end{cases}$

(a) Détermine les cinq termes de la suite $(V_n)$.
(b) Détermine le dixième terme de cette suite.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Remarque**

Pour une suite définie par une formule de récurrence, le premier terme est connu et chaque terme est fonction du précédent.

## 3.2 Suites arithmétiques

**Activité 1.5**

La mère de Mimi à épargné 1.200.000F qu'elle décide de prêter à une collègue commerçante le 1er janvier 2000. Cette somme doit lui rapporter à la fin de chaque année un intérêt fixe de 800.000F.
La maman de Mimi se demandait si ce qu'elle va retirer à la fin de l'année 2005 peut dépasser 5.000.000F.
On désigne par $S_n$ la somme que la maman de Mimi doit retirer (capital plus intérêt) le 1er janvier de l'an $2000 + n$ et on pose $S_0 =$ 1.200.000F.

### 3.2.1 Connaissance ; définition et propriété d'une suite arithmétique

**Consigne 3.3**

1. Détermine $S_1$ et $S_2$.
2. Exprime $S_{n+1}$ en fonction de $S_n$.
3. (a) exprime $S_1$ et $S_2$ en fonction de $S_0$ et $r$ avec $r = 800.000$.
   (b) Conjecture $S_n$ en fonction de $n$ et $S_0$.
4. (a) Calcule $S_5$.
   (b) La mère de Mimi a-t-elle atteint son objectif ?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 8min**

**Définition : Suite arithmétique**

Soit $(U_n)_{n\in E}$ une suite numérique.
La suite $(U_n)$ est arithmétique si et seulement s'il existe une constante réelle $r$ telle que $\forall n \in E$,

$U_{n+1} = U_n + r$ ou $U_{n+1} - U_n = r$.

Le nombre $r$ est appelé **raison** de la suite $(U_n)$.

**Exemple** : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite arithmétique de raison $r = -4$ et de premier terme $u_0 = 2$.

**Propriétés**

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme $U_0$ et de raison $r$, on a : $U_n = U_0 + nr$
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r$, on a : $\forall\, n, k \in \mathbb{N}\ (n > k), U_n = U_k + (n - k)r$

**Exemple** : $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $r = 2$ alors on a :
$u_4 = u_3 + (4 - 3)2$
$u_{10} = u_6 + (10 - 6)2$
$u_{100} = u_7 + (100 - 7)2$

### 3.2.2 Méthode de démonstration

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est arithmétique, on détermine d'abord $u_{n+1}$ et ensuite on détermine $u_{n+1} - u_n$.
La valeur trouver au calcule de $u_{n+1} - u_n$ est la raison de la suite $(u_n)$

**Application 1.12**

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de terme général $U_n = 2n + 5$

1. Détermine les cinq premiers termes de la suite $(U_n)$.
2. Démontre que la suite $(U_n)$ est arithmétique dont tu préciseras sa raison et son premier terme.

**Stratégies et durées : TI : 5min TC : 7min**

### 3.2.3 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

**Définition**

La somme $S$ de ***n termes consécutifs*** d'une suite arithmétique $(u_n)$ est égale au produit par $\boldsymbol{n}$ de la demi – somme des termes extrêmes.

$$S = u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_n$$

$$\boldsymbol{S = \frac{(n-a+1)(u_a+u_n)}{2}}$$

- $(n - a + 1)$ est le nombre de terme de la somme $S$ avec $n$ l'indice du premier dernier terme et $a$ l'indice du premier terme;
- $u_a$ est le 1er terme de la somme $S$ et $u_n$ son dernier terme.

**Application 1.13**

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = -5n + 2$ et on pose $S = u_0 + u_1 + \cdots u_{30}$ et $S' = u_5 + u_1 + \cdots u_{15}$

Détermine $S$ **et** $S'$

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 3.2.4 Détermination d'une suite arithmétique

**Consigne 3.4**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique telle que $u_8 = -5$ et $u_{15} = 37$.

Détermine la raison et le 1er terme de cette suite.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 3.2.5 Résolution de problème conduisant à une suite arithmétique

**Consigne 3.5**

En 2005, 3000 contrôles radar ont été effectués sur une autoroute de Dakar. Il a été prévu d'augmenter le nombre de ces contrôles de 100 tous les ans.

1. Calcule le nombre de contrôles effectués en 2006.
2. On désigne par $C_n$ le nombre de contrôles effectués au bout de $n$ années.
   (a) Quelle est la nature de la suite $(C_n)$ ?
   (b) Exprime $C_n$ en fonction de $n$.
   (c) Quel est le nombre de contrôles effectués en l'an 2010 ?
   (d) Au combien d'années le nombre de contrôles atteindra – t – il 5000 ?
3. Quel est le nombre total de contrôles de l'année 2005 à l'année 2014 ?

**Stratégies et durées : TI : 5min TC : 7min**

## 3.3 Suites géométriques

**Activité 1.6**

Le père de Mimi a économisé sur une année une somme de 820.000F et veut qu'après 5ans de placement, son avoir soit au moins 1.500.000F. Il décide alors de placer cette somme en premier janvier 2000 dans une banque qui pratique un taux d'intérêt annuel de 6%.

On désigne par $A_n$ l'avoir du papa de Mimi à la fin de la $n^{ième}$ année si ce dernier a fait un placement compte bloqué et on pose $A_0 = 820.000$F.

### 3.3.1 Connaissance ; définition et propriété d'une suite géométrique

**Consigne 3.6**

1. (a) Calcule $A_1$ ; $A_2$ et $A_3$.
   (b) Exprime $A_n$ en fonction de $A_{n-1}$.
2. Exprime $A_1$ ; $A_2$ et $A_3$ en fonction de $A_0$.
3. (a) En observant $A_1$ ; $A_2$ et $A_3$, donne l'expression de $A_n$ en fonction de $A_0$ et de $n$.
   (b) Déduis – en $A_5$.
4. L'objectif du père de Mimi est – il atteint ?

**Stratégies et durées : TI : 5min TC : 7min**

**Définition : Suite géométrique**

Soit $(U_n)_{n\in E}$ une suite numérique.

La suite $(U_n)$ est géométrique si et seulement s'il existe une constante réelle $q$ telle que $\forall n \in E$,

$U_{n+1} = q \times U_n$ ou $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$.

Le nombre $q$ est appelé **raison** de la suite $(U_n)$.

**Exemple** : $\begin{cases} v_0 = \frac{2}{3} \\ v_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_0 = \frac{2}{3}$.

**Propriétés**

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $U_0$ et de raison $q$, on a : $U_n = U_0 \times q^n$
- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q$, on a : $\forall\, n, k \in \mathbb{N}\ (n > k), U_n = U_k \times q^{n-k}$

**Exemple** : $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 2$ alors on a :

$u_3 = u_0 \times (2)^3$

$u_5 = u_3 \times (2)^{5-3}$

$u_{10} = u_7 \times (2)^{10-7}$

$u_{50} = u_{13} \times (2)^{50-13}$

### 3.3.2 Méthode de démonstration

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)$ est géométrique, on détermine d'abord $u_{n+1}$ et ensuite on détermine $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

La valeur trouver au calcule de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est la raison de la suite $(u_n)$

**Application 1.13**

On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $v_n = 10^n$

1. Détermine les cinq premiers termes de la suite $(v_n)$.
2. Démontre que la suite $(v_n)$ est géométrique et précise sa raison et son premier terme.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 3.3.3 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

**Définition**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_a$.

La somme $S$ de ***n termes consécutifs*** de la suite la suite $(u_n)$ est :

- Si $q \neq 1$ alors $S = u_a \times \frac{1-q^n}{1-q}$
- Si $q = 1$ alors $S = n \times u_a$

### 3.3.4 Détermination d'une suite géométrique

**Consigne 3.7**

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique telle que $u_3 = -5$ et $u_6 = 40$

Détermine la raison et le premier terme de cette suite.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 3.3.5 Résolution de problème conduisant à une suite arithmétique

**Consigne 3.8**

Une population de bactéries double toutes les heures.

1. Au bout de combien d'heures la population sera-t-elle multipliée par 128 ?
2. Par combien sera – t – elle multipliée au bout de 8 heures ?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Application 1.14**

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - (n+1) \end{cases}$ et $v_n = u_n + 2n - 2$ $(n \in \mathbb{N})$

1. Démontre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique et précise sa raison et son premier terme.
2. Exprime $v_n$ en fonction de $n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.
3. Soit $(w_n)$ une suite géométrique de raison 3 tel que $v_2 = 2$.
   Détermine le terme général de la suite $(w_n)$.

**Stratégies et durées : TC : 10min**

## Séquence 4 : Statistiques

### 4.1 Caractéristiques d'une série statistique

#### 4.1.1 Caractéristiques de position : Mode – Médiane – Moyenne d'une série statistique

**Activité 1.7**

Mimi veut connaître le taux d'intérêt le plus avantageux appliqué par les banques de la sous-région à ses clients. Pour cela elle collecte le taux d'intérêt suivants en pourcentage.

Elle se demande comment organiser ses données en vue d'opérer le meilleur choix.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 10 | 9 | 10 | 9 | 9 | 9 | 11 | 8 | 9 |
| 12 | 11 | 8 | 10 | 12 | 11 | 9 | 10 | 9 | 11 |
| 12 | 9 | 10 | 11 | 8 | 10 | 8 | 8 | 10 | 12 |

**Consigne 4.1**

1. Dresse le tableau des effectifs de cette série statistique.
2. Calcule la moyenne $\bar{x}$ de cette série statistique.
3. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique.
4. Quelle est la modalité ayant le plus grand l'effectif ?
5. Quelle est la modalité pour laquelle le cumule des effectifs croissant et décroissant atteint 15 ?

**Stratégies et durées : TI : 5min TC : 8min**

**Définitions**

Soit une série statistique de modalité $(x_i)1 \leq i \leq n$ d'effectifs $(n_i)1 \leq i \leq n$ et d'effectif total $N$

1. On appelle **mode** d'une série statistique, toute modalité ayant le plus grand effectif. On note $M_O$.
2. On appelle **médiane** d'une série statistique, le nombre noté $M_e$, tel que 50% des modalités sont inférieures ou égales à $M_e$ et 50% supérieures ou égales à $M_e$.

3. On appelle moyenne d'une série statistique, le nombre réel $\bar{x}$ tel que :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum n_i x_i$$

4. On appelle fréquence d'une série statistique le nombre réel

$$f = \frac{n_i \times 100}{N}$$

**Remarque**

La médiane d'une série statistique n'est pas toujours une modalité de cette série.

**Vocabulaire**

La médiane, le mode et la moyenne sont appelés **caractéristiques de position**

### 4.1.2 Caractéristiques de dispersion : Variance – Ecart type d'une série statistique

**Consigne 4.2**

Pour la série des taux d'intérêt, on donne le tableau suivant :

| Modalité$(x_i)$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs$(n_i)$ | | | | | | |
| $x_i - \bar{x}$ | | | | | | |
| $(x_i - \bar{x})^2$ | | | | | | |
| $n_i(x_i - \bar{x})^2$ | | | | | | |

1. Reproduis et complète le tableau ci – dessus.
2. Calcule le nombre réel $= \frac{1}{N}\sum n_i(x_i - \bar{x})^2$ .
3. Calcule le nombre réel $\sigma = \sqrt{V}$.

**Stratégies et durées : TI : 7min TC : 10min**

**Définitions**

- La variance d'une série statistique, notée $V$, est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

On a :

$V = \frac{1}{N}\sum n_i(x_i - \bar{x})^2$ ou $V = \left(\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2\right) - (\bar{x})^2$

- L'écart type, noté $\sigma$, est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$

**Vocabulaire**

La variance et l'écart type sont appelés caractéristiques de dispersion.

**Application 1.15**

A l'issu d'un devoir, les élèves d'une classe de 1ère ont obtenu les notes suivantes :

| Note $(x_i)$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif $(n_i)$ | 1 | 2 | 3 | 7 | 11 | 8 | 6 | 5 | 4 | 3 |

1. Détermine le mode et l'effectif total de cette série statistique.
2. Calcule la moyenne et l'écart type de cette série statistique.
3. Détermine la médiane de cette série statistique.

**Stratégies et durées : TC : 10min**

### 4.2 Séries à modalité regroupées en classes

**Note** : Lorsque dans une population les caractères étudiés sont trop nombreux, on peut procéder à un regroupement en classe. Une classe étant un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $a$ et $b$ des réels.

**Définitions**

On considère une série statistique, à modalités regroupées en classes.

- On appelle **effectif cumulé croissant (ECC)** relatif à une classe, la somme des effectifs de cette classe et de celles qui la précèdent ;
- On appelle **effectif cumulé décroissant (ECD)** relatif à une classe, la somme des effectifs de cette classe et de celles qui lui succèdent ;
- On appelle **fréquence cumulée croissante (FCC)** relative à une classe, la somme des effectifs de cette classe et de celles qui la précèdent ;
- On appelle **fréquence cumulée décroissante (FCD)** relative à une classe, la somme des effectifs de cette classe et de celles qui lui succèdent ;
- La fréquence cumulée est égale au quotient de l'effectif cumulé par l'effectif total ;
- On appelle classe modale d'une série statistique à modalités regroupées en classes, toute classe dont l'effectif est le plus grand.
- Le centre de la classe $[a_i ; b_i[$ est le nombre $c$ tel que $c = \frac{a_i + b_i}{2}$

### Remarque
Une série statistique à modalités groupées en classes peut avoir plusieurs classes modales

### Retenons
1. Pour représenter graphiquement dans un repère orthogonal, les effectifs cumulés croissants, on peut :
   (a) placer le premier point, d'abscisses la bonne inférieure de la première classe et d'ordonnées 0 ;
   (b) placer les autres points, d'abscisses les bornes les bornes supérieures des classes et d'ordonnées les effectifs cumulés correspondants ;
   (c) joindre ces points par des segments.
2. Pour représenter graphiquement dans un repère orthogonal, les effectifs cumulés décroissants, on peut construire les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes (sauf le dernier point) et dont les ordonnées sont les effectifs cumulés décroissants correspondants. On joint ces points par des segments.
3. Le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants se coupent au point d'ordonnée $\frac{N}{2}$ avec N l'effectif total de la série.
4. Par analogie on construire le polygone des fréquences cumulés croissants et décroissants.
5. **La médiane d'une série groupée en classes**, est l'abscisse du point d'intersection du polygone des effectifs cumulés croissant et décroissant.

### Activité 1.8
Mimi regroupe le taux d'intérêt pratiqués par les banques dans le tableau suivant :

| Classes | [7 ; 9[ | [9 ; 11[ | [11 ; 13[ | Total |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs($n_i$) | | | | |
| ECC | | | | |
| ECD | | | | |
| FCC | | | | |
| FCD | | | | |
| Centre $c_i$ | | | | |
| $n_i c_i$ | | | | |
| $c_i - \bar{x}$ | | | | |
| $n_i(c_i - \bar{x})^2$ | | | | |

### Consigne 4.3
1. Reproduis et complète le tableau ci – dessus.
2. Calcule le nombre réel $= \frac{1}{N}\sum n_i(c_i - \bar{x})^2$ .
3. Calcule le nombre réel $\sigma = \sqrt{V}$.
4. Représente :
   (a) l'histogramme de cette série statistique.
   (b) le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants de cette série statistique.

### Définition
Dans une série statistique groupée en classes,
1. la variance est le nombre réel $V$ tel que $V = \frac{1}{N}\sum n_i(c_i - \bar{x})^2$ ou $V = \left(\frac{1}{N}\sum n_i c_i^2\right) - (\bar{x})^2$
2. L'écart type, noté $\sigma$, est la racine carrée de la variance : $\sigma = \sqrt{V}$

### Application 1.16
Les tableaux A et B ci-dessous donnent respectivement la répartition de certains candidats à un concours organisé par la mairie de Parakou, selon leurs notes en mathématique et la distribution des primes de déplacement aux élèves participants.

**Tableau A**

| Notes | [0, 2[ | [2, 3[ | [3, 4[ | [4, 6[ | [6, 8[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 6 | 9 | | 15 | 7 | |
| ECC | | | | | 40 | |

**Tableau B**

| Prime (CFA) | [300, 600[ | [600 ;700[ | [700, 800[ | [800 ;900[ | Total |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 3 | 21 | 6 | 10 | 40 |

1. Calcule la moyenne, la variance, le mode du tableau A après l'avoir complété.
2. Pour le tableau B :
   (a) Calcule l'écart-type et le mode.
   (b) Construit l'histogramme et polygone des effectifs.
   (c) Calcule la médiane.
   (d) Construis sur le même graphe, le polygone des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissantes.

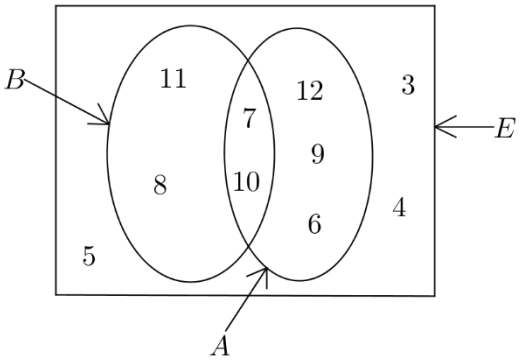
**Stratégies et durées : TC : 10min**

# Séquence 5 : Dénombrement

## 5.1 Compléments sur les ensembles

### Activité 1.9

A la suite de ses enquêtes, Mimi décide d'étudier les différents taux d'intérêts pratiqués par les banques dans deux différents pays A et B de la sous-région. Elle obtient la représentation suivante :




### 5.1.1 Réunion et intersection de deux ensembles

### Consigne 5.1

1. Dresse les éléments des ensembles A ; B et E.
2. Quels sont les éléments de E appartenant à la fois à A et à B?
3. Quels sont les éléments de E appartenant à l'un au moins des ensembles A et B?
4. Quels sont les éléments de E n'appartenant ni à A ni à B?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### Définitions

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Un ensemble est dit fini s'il est vide ou si on peut compter tous ses éléments.
2. On appelle intersection de A et B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A et à B.
   On note $A \cap B$ et on lit « A inter B ».
   $x \in A \cap B$ signifie que $x \in A$ et $x \in B$
3. On appelle réunion de A et B, l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B.
   On note $A \cup B$ et on lit « A union B ».
   $x \in A \cup B$ signifie que $x \in A$ ou $x \in B$.

### Propriété

Soit E un ensemble non vide de $\mathbb{R}$.
Le nombre d'éléments de E est appelé "**cardinal de E**". Si $n$ est le nombre d'éléments de E alors $Card(E) = n; n \in \mathbb{N}^*$
Soit A et B deux parties d'un ensemble fini E.
On a :

$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

### Remarque

Si $A \cap B = \phi$ alors $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

### Application 1.17

Chacun des 40 élèves d'une classe étudie l'arabe ou le français. 15 élèves étudient les deux langues. Combien d'élèves étudient une seule des deux langues ?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### Application 1.18

Dans un club sportif, tous les membres pratiquent au moins un des deux sports proposés : le basket et le handball. 850 membres pratiquent le basket, 600 pratique le handball et 250 pratiquent les deux sports.
Combien de membres compte ce club sportif ?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 5.1.2 Complémentaire d'un ensemble

### Consigne 5.2

On désigne par $\bar{A}$ l'ensemble des éléments de $E$ n'appartenant pas à $A$.

1. Dresse les éléments de $\bar{A}$.
2. Détermine $Card(\bar{A})$ en fonction de $Card(E)$ et de $Card(A)$.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### Définition : Complémentaire d'un ensemble

On appelle complémentaire de $A$ dans $E$, l'ensemble des éléments de $E$ n'appartenant pas à $A$.
On note $C_E^A$ ou $\bar{A}$ ; on lit « complémentaire de $A$ dans $E$.

### Propriété : Cardinal du complémentaire d'un ensemble

Soit $A$ une partie d'un ensemble fini $E$.
On a : $Card(\bar{A}) = Card(E) - Card(A)$.

### 5.1.3 Produit cartésien

### Consigne 5.3

On choisit successivement une banque $x$ de $A$ et une autre banque $y$ de B ; on obtient un couple $(x ; y)$ et on désigne par G l'ensemble des couples possibles.

1. Détermine l'ensemble G.
2. (a) Détermine $Card(G)$.
   (b) Compare $Card(G)$ et $Card(A) \times Card(B)$.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### Définition : Produit cartésien

Soit A et B deux ensembles.

On appelle produit cartésien de A par B l'ensemble des couples $(a\,;b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$.
On note $A \times B$ ; on lit « A croix B »

**Propriété : Cardinal du produit cartésien**
Soit A et B deux ensembles finis.
On a : $Card(A \times B) = Card(A) \times Card(B)$

**Application 1.21**
Combien de nombres de deux chiffres peut-on écrire si le premier chiffre doit être choisi parmi les chiffres 3, 4 et 7?
**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Application 1.20**
Dans une épreuve d'examen, on propose 3 sujets de mathématiques et 5 sujets de français. Un candidat doit choisir un sujet de chaque discipline.
Combien a – t – il de choix possibles ?
**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

## 5.2 $p$ – uplets, arrangements et permutation

### 5.2.1 $p$ – uplets d'un ensemble

**Définition**
Soit E un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble $E^p$

**Propriété**
1. Le nombre de $p$-*uplet* d'un ensemble à $n$ éléments est $n^p$.
2. Le nombre d'applications d'un ensemble à $p$ éléments vers un ensemble à $n$ éléments est égal à $n^p$.

**Application 1.21**
Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.
De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?
**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 5.2.2 Arrangements

**Définition**
Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments et $p$ un entier naturel non nul tel que $p \leq n$.
On appelle **arrangement** de $p$ éléments de $E$, tout $p$-*uplet* d'éléments de $E$ deux à deux distincts.

**Propriété**
Le nombre d'arrangements de $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments, noté $A_n^p$, est tel que :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$$

$A_n^p$ est lu "arrangement de $p$ dans $n$".

**Exemple** : $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$

**Remarque**
1. Le nombre de facteurs du produit $(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$ est égal à $p$.
2. Si $p > n$ il est impossible de trouver $p$ éléments deux à deux distincts

**Consigne 5.4**
Au siège d'une banque de la sous – région se trouve un parking de 7 places. Mimi se demande combien y-t-il de façons d'y garer 4 voitures si deux ne peuvent occuper la même place.
1. Que représente l'état d'occupation des 7 places par les 4 voitures?
2. Combien y a-t-il de façons de garer la $1^{ère}$ voiture venue dans le parking?
3. Combien y a-t-il de façons de garer la $2^{ème}$ voiture venue dans le parking?
4. Combien y a-t-il de façons de garer la $3^{ème}$ voiture venue dans le parking?
5. Combien y a-t-il de façons de garer la $4^{ème}$ voiture venue dans le parking?
6. Détermine donc le nombre de façons qu'il y a de garer les 4 voitures dans le parking.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Définition**
Soit $n$ un nombre entier naturel.
1. On appelle factorielle $n$ le nombre entier $n!$ tel que :
$$n! = n(n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

**Exemples**
10 !=10×9×8×7×6×5×4×3×2×1= 33.628.800
9 ! =9×8×7×6×5×4×3×2×1= 362.880
8 != 8×7×6×5×4×3×2×1= 40.320
7 != 7×6×5×4×3×2×1= 5.040
6 != 6×5×4×3×2×1= 720

2. Par convention, 0 !=1

**Propriété**
1. Soit $n$ et $p$ deux entiers naturels non nuls tels que $p \leq n$, on a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
2. Par convention $A_n^0 = 1$

**Consigne 5.5**
1. Détermine le nombre de façons différentes de faire asseoir dix personnes sur quinze chaises

numérotées de 1 à 15, sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise.

2. A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze. Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

### 5.2.3 Permutation

**Définition**

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments.
On appelle permutation de $E$, tout arrangement des $n$ éléments de $E$.

**Propriété**

Le nombre de permutations d'un ensemble à $n$ éléments est $n$ !.

**Consigne 5.6**

De combien de manières peut-on disposer 6 drapeaux de 6 pays différents sur 6 mâts ?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Anagramme d'un mot**

On appelle anagramme d'un mot, tout mot formé avec les lettres qui le composent.
Le nombre d'anagrammes de mots de $n$ lettres comportant $k$ groupes lettres se répétant $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ fois est donc égal à : $\frac{n!}{p_1!\, p_2! p_3! \dots p_k!}$

**Application 1.24**

Détermine le nombre d'anagrammes de chacun des nombres suivants : MATH, CONSONNES, PATRICE.

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

## 5.3 Combinaison

**Définition**

Soit $E$ un ensemble à $n$ éléments et $p$ un entier naturel
non nul tel que $p \leq n$.
On appelle **combinaison** de $p$ éléments de $E$, tout sous-ensemble de $E$ ayant $p$ éléments.

**Propriété**

Le nombre de combinaisons de $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments noté $C_n^p$ est tel que :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

$C_n^p$ est lu '' combinaison de $p$ dans $n$''

**Exemple :**

$C_5^3 = \frac{A_5^3}{3!} = \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 10$ ou

$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(2\times1)} = 10$

**Consigne 5.6**

De combien de façons peut-on choisir 3 femmes et 2 hommes parmi 10 femmes et 5 hommes?

**Stratégies et durées : TI : 4min TC : 5min**

**Remarque**

Une combinaison de $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments ne peut exister que si $p \leq n$.
$C_n^0 = 1 \quad ; C_n^1 = n$

**Retenons**

Pour déterminer le nombre de tirages de $p$ éléments d'un ensemble $E$ à $n$ éléments ($p \leq n$), on peut utiliser le tableau suivant :

| Modélisation | Les $p$ éléments sont ordonnés | Les $p$ éléments sont distincts | Outil | Nbre de tirage |
|---|---|---|---|---|
| Tirages successifs avec remise | Oui | non | p-uplet | $n^p$ |
| Tirages successifs sans remise | Oui | oui | Arrangements de $p$ éléments de $E$ | $A_n^p$ |
| Tirages simultané | Non | oui | Combinaisons de $p$ éléments de $E$ | $C_n^p$ |

**Evaluation formative 1.1**

Une urne contient 6 boules noires, 2 boules blanches et 4 boules vertes.

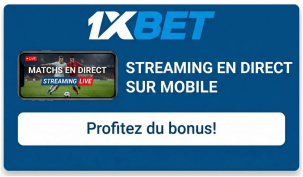
1. On tire simultanément trois boules de l'urne.
   (a) Détermine le nombre N1 de tirage possible.
   (b) Détermine le nombre N2 de tirage comportant 3 boules noires.
   (c) Détermine le nombre N3 de tirage comportant 3 boules de trois couleurs différente (Une boule de chaque couleur).
   (d) Détermine le nombre N4 de tirage comportant trois boules de même couleur.
2. Reprend les questions 1) en supposant que les tirages sont successifs et avec remise.
3. Reprend les questions 1) en supposant que les tirages sont successifs et sans remise.

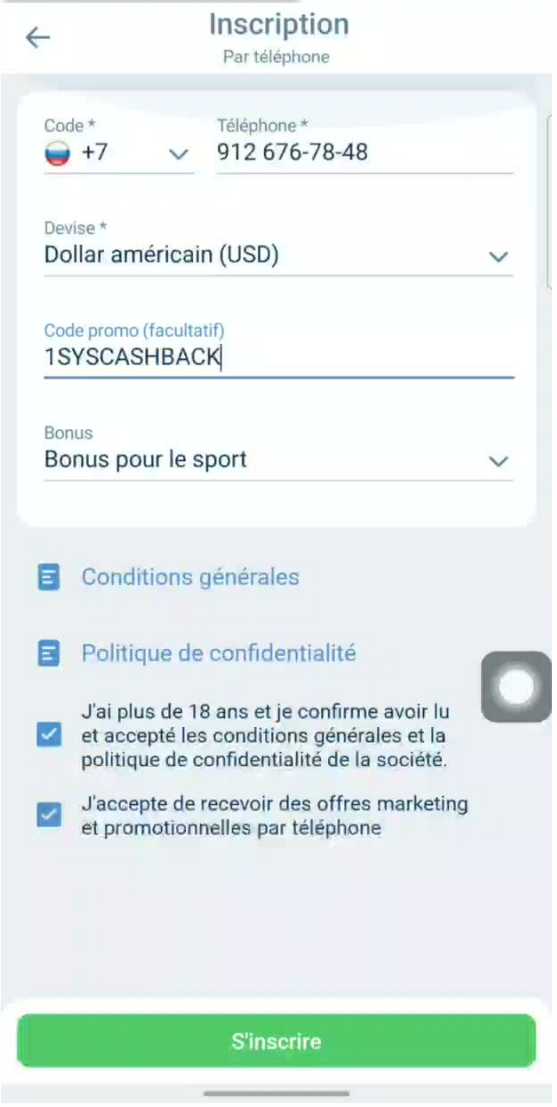
**Stratégies et durées : TC : 10min**

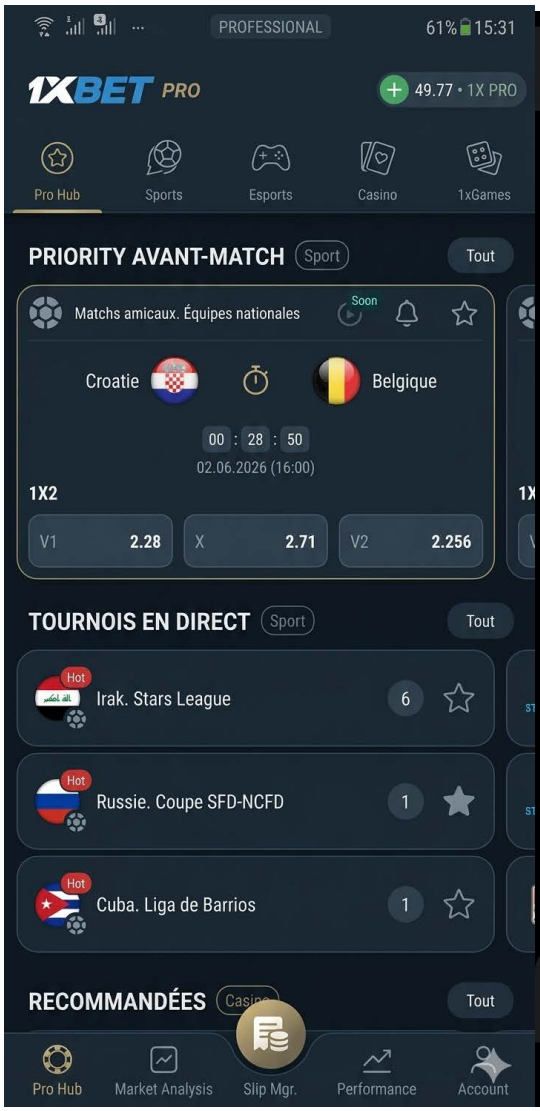
**Evaluation formative 1.2**

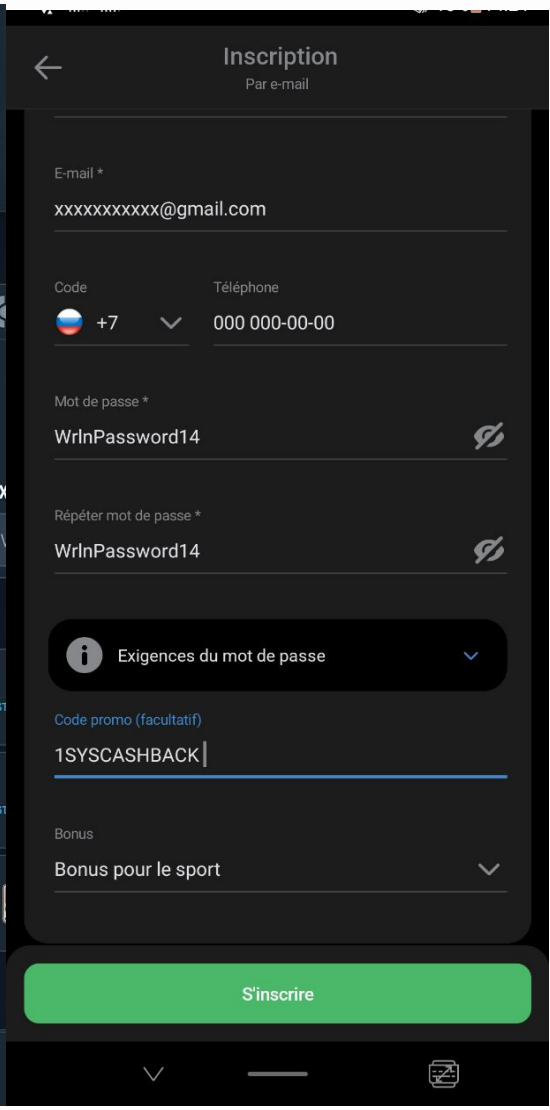
Une urne contient 3 boules noires ; 2 boules blanches ; 3 boules rouges

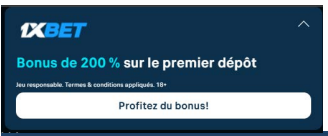
1. On tire simultanément trois boules de l'urne trois boules de l'urne.

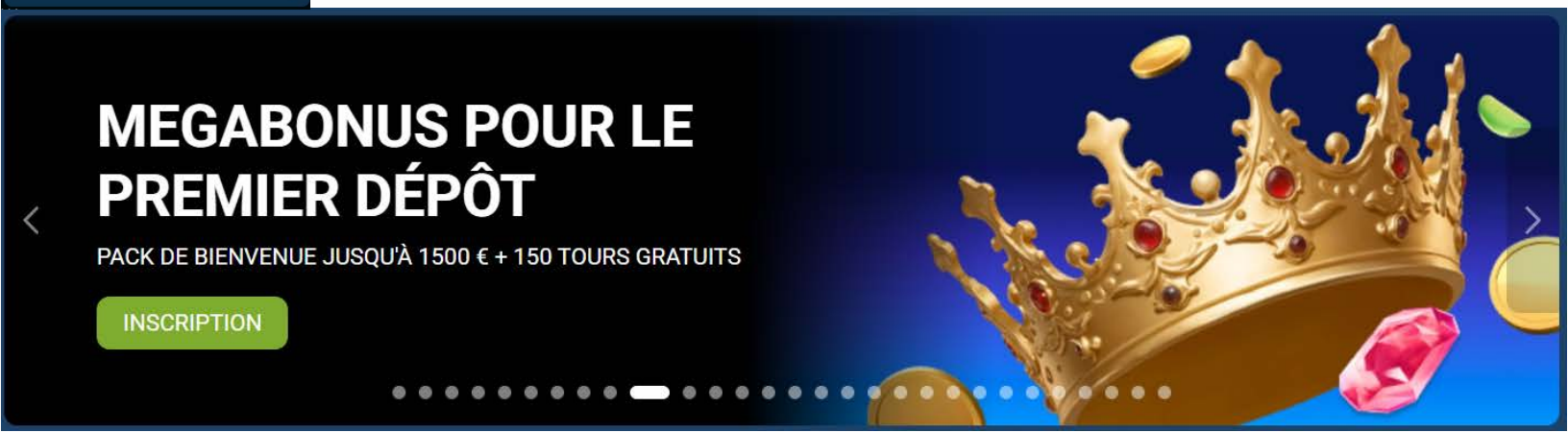

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

(a) Détermine le nombre $N_1$ de tirage possible.
(b) Détermine le nombre $N_2$ de tirage comportant exactement deux boules noires.
(c) Détermine le nombre $N_3$ de tirage comportant au moins une boule noire.

2. On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne. Détermine le nombre $N_4$ de tirage comportant trois boules de même couleur.

**Stratégies et durées : TC : 10min**

## Retour et projection

1. Qu'as-tu découvert sur la SA1 ?
2. Qu'as-tu appris de nouveau sur la SA1 ?
3. Qu'as-tu trouvé difficile, voire facile sur la SA1 ?
4. Qu'est-ce que tu as réussi ?
5. Qu'est-ce que tu n'as pas réussi ?
6. Qu'est-ce que tu vas faire pour améliorer ta production ?

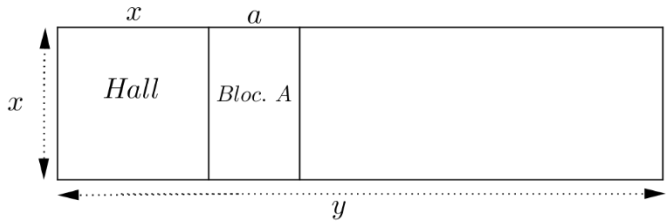
**Fin de la SA N°1**

# SA N°2 : LIEUX GEOMETRIQUE

## Situation de départ

### Texte : Construction d'un centre commercial.

Nahum a reçu une autorisation de sa mairie pour installer un petit centre de commerce sur un domaine publique. Il ne doit cependant pas dépasser une superficie de $2dam^2$ . Il pense à un espace rectangulaire dans lequel il réservera un carré de côté égal à la largeur du rectangle ; ce carré lui servira de hall pour la vente de ses articles. Il pense également réserver pour le bloc administratif un petit rectangle de largeur a comme l'indique le schéma ci-dessous :




Un des amis de Nahum lui conseil de prévoir tout autour du centre un parterre fleuri de largeur 2m. Nahum se demande comment choisir les différentes dimensions pour rester dans la légalité ; il est aussi préoccupé par la gestion des différentes surfaces.

Tu vas te construire de nouvelles connaissances en mathématique; pour cela, tu auras, tout au long de la S.A., à :

1. Exprimer ta perception de chacun des problèmes posés.
2. Analyser chacun des problèmes.
3. Opérer sur l'objet mathématique que tu as identifié pour chaque problème
4. Améliorer au besoin ta production

## 1.1 Fonctions – Applications

### 1.1.1 Domaine de définition(Rappels)

**Définition : *Ensemble de définition***

$f$ est une fonction définie d'un ensemble A vers un ensemble B.

On appelle ensemble de définition de $f$ l'ensemble des éléments de A ayant une image par $f$.

On note souvent $D_f$ l'ensemble de définition de $f$.

**Définition : Application**

Une application est une fonction de A vers B qui à chaque élément de A associe un et un seul élément de B

Ou bien

Une application est une fonction dont son ensemble de départ est égale à son ensemble de définition.

**Retenons**

Soit $P$ *et* $Q$ deux fonctions polynômes et $D_f$ l'ensemble de définition de $f$. $f$ une fonction définie d'une partie A de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ :

$$f : \begin{matrix} A \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{matrix}$$

- Si $f$ est sous la forme $f(x) = P(x)$, alors on a : $D_f = \{x \in A \,/ f(x)\ existe\ dans\ \mathbb{R}\}$
- Si $f$ est sous la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, alors on a : $D_f = \{x \in A \,/ Q(x) \neq 0\}$
- Si $f$ est sous la forme $f(x) = \sqrt{P(x)}$, alors on a : $D_f = \{x \in A / P(x) \geq 0\}$
- Si $f$ est sous la forme $f(x) = \frac{\sqrt{P(x)}}{Q(x)}$, alors on a : $D_f = \{x \in A \,/ P(x) \geq 0 \ \ et\ Q(x) \neq 0\}$
- Si $f$ est sous la forme $(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, alors on a : $D_f = \{x \in A / Q(x) > 0\}$
- Si $f$ est sous la forme $(x) = \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x)}}$, alors on a : $D_f = \left\{x \in A / \frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \ \ et\ Q(x) \neq 0\right\}$

**Consigne 1.1 : Domaine de définition**

Détermine le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 3x^2 + 2x - 3$ ; $x \longmapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et
$x \longmapsto \frac{2x+3}{2x+1}$ ; $x \longmapsto \frac{2x+3}{x^2-2x-3}$

$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.1.2 Représentation graphique des fonctions $f(-x)$ et $-f(x)$

Soit $R = (O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ un repère orthogonal et $(C_f)$ la représentation graphique de la fonction $f$ dans $\mathbb{R}$.

1. La représentation graphique de la fonction $g$ : $x \mapsto -f(x)$ est le symétrique de $(C_f)$ par rapport à $(O\ ;\ \vec{\imath})$.

2. La représentation graphique de la fonction $h$ : $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique de $(C_f)$ par rapport à $(O\,;\vec{j})$

### 1.1.3 Parité d'une fonction

**Consigne 1.2 Parité d'une fonction**

On considère les fonctions suivantes :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -x^2+1$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$

1. Précise les ensembles de définition des fonctions $f$ et $g$.
2. Pour tout $x$ appartenant à $\mathbb{R}$, calcule $f(-x)$ en fonction de $x$ puis dis ce que tu constates.

**Information**

On dit que la fonction $f$ est paire.

3. Pour $x$ appartenant à $\mathbb{R}^*$, calcule $g(-x)$ en fonction de $x$ puis dis ce que tu constates.

**Information**

On dit que la fonction $f$ est impaire.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

**Retenons**

Soit $f$ une fonction ayant pour domaine de définition $D_f$ et pour courbe représentative $(C_f)$.

- $f$ est une fonction paire si et seulement si : $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ et $f(x) = f(-x)$
- Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction paire a un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.
- $f$ est une fonction impaire si et seulement si : $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ et $f(x) = -f(-x)$
- L'origine du repère est un centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction impaire.

**Consigne 1.3 Application**

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = 2x^4 + x^2$

$g(x) = \frac{-x^3-x}{x^2-1}$ et $h(x) = x - 1$

1. Détermine le domaine de définition des fonctions $f$, $g$ et $h$.
2. Etudie la parité de chacune des fonctions suivantes.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

## 1.2 Notion de limite

**Activité 2.1**

Luc un ami de Nahum élève de la classe de 1ère A voulait tracer la courbe qui permettra de voir l'évolution de la longueur des carrés successifs construits Pour cela il se rend il se rend compte qu'il a besoin des notions de limite, de continuité et de dérivation afin de bien construire cette courbe

### 1.2.1 Limite finie d'une fonction en un nombre $x_0$

**Consigne 1.4**

On considère la fonction suivante : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto 5x+3$

1. Complète le tableau suivant :

| $x$ | 1,999 | 1,9999 | 2,001 | 2,00001 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | | | |

2. Pour $x$ prenant des valeurs voisines de 2, $f(x)$ est proche de quelle valeurs ?

**Information**

On dit que $f(x)$ tend vers 13 quand $x$ tend vers 2 et on écrit : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 13$ ou $\lim\limits_{2} f = 13$ puis on lit limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 2 égale à 13.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

**Définition**

Soit $f$ une fonction numérique définie ou non en un point $x_0$ de $\mathbb{R}$ et $l$ un nombre réel. On dit que $f(x)$ tend vers $l$ lorsque $x$ tend vers $x_0$ ou que $l$ est la limite de $f$ au point $x_0$ ou si $f(x)$ s'approche de $l$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de $x_0$.

On note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x_0} f = l$

**Propriété**

Lorsqu'une fonction $f$ est définie en $x_0$ et admet une limite en $x_0$ alors cette limite est égale à $f(x_0)$ ; c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

**Remarque**

Toute fonction polynôme, rationnelle, racine carré, valeur absolue ; toutes sommes des fonctions précédentes admet une limite en tout point de leur domaine de définition.

**Consigne 1.5 : Application**

Dans chacun des cas suivants, calcule la limite de $f$ en $x_0$.

$f(x) = 2x - 4$ ; $x_0 = 3$
$f(x) = x^2 - 3x + 4$ ; $x_0 = 2$
$f(x) = \frac{-2x}{3x+2}$ ; $x_0 = -1$
$f(x) = \sqrt{-2x+1}$ ; $x_0 = -4$
$f(x) = 6 - \frac{1}{3x+4}$ ; $x_0 = 0$
$f(x) = x - \frac{2x}{x+4}$ ; $x_0 = -1$

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.2.2 Limite en l'infini des fonctions élémentaires

**Retenons**

Soit $k$ un nombre réel et $n$ un entier naturel, on a :

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty}(k)=k$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}(k)=k$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}(x)=-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x})=+\infty$ | |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)=0$ |

$$\lim_{x\to+\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & si\ n\ est\ pair\\ +\infty & si\ n\ est\ impair\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}+\infty & si\ n\ est\ pair\\ -\infty & si\ n\ est\ impair\end{cases}$$

### 1.1.1 Opérations sur les limites

Les tableaux ci-dessous donnent les limites en $x_0$ des fonctions $f+g$ ; $f\times g$ et $\frac{1}{g}$ connaissant les limites en $x_0$ ders fonctions $f$ et $g$.

**Propriété : Limite de la somme de deux fonctions**

| $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ | $l'$ | $l'$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Propriété : limite du produit de deux fonctions**

| $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)(x)$ |
|---|---|---|
| $l$ | $l'$ | $l\times l'$ |
| $+\infty$ | $l'(l'\neq 0)$ | $\begin{cases}+\infty\ si\ l'>0\\ -\infty\ si\ l'<0\end{cases}$ |
| $-\infty$ | $l'(l'\neq 0)$ | $\begin{cases}-\infty\ si\ l'>0\\ +\infty\ si\ l'<0\end{cases}$ |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 | Pas de conclusion |

**Propriété : Limite de l'inverse d'une fonction**

| $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ | $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x)$ |
|---|---|
| $l$ | $\frac{1}{l}(l\neq 0)$ |
| $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 |
| 0 et $f(x)>0$ | $+\infty$ |
| 0 et $f(x)<0$ | $-\infty$ |

**NB** : Ces propriétés restent vraies pour les limites en $+\infty$ ; en $-\infty$ et en $x_0$ par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures.

**Remarque**

Les propriétés précédentes ne couvrent pas tous les cas.

On appelle **forme indéterminée**, les cas où les propriétés ci – dessous ne permettent pas de conclure.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ prend la forme indéterminé $\frac{0}{0}$
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ou $(-\infty)$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f\times g)(x)$ prend la forme indéterminée $0\times(+\infty)$ ou $0\times(-\infty)$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ou $-\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ ou $-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ prend la forme indéterminé $\frac{+\infty}{-\infty}$ ou $\frac{-\infty}{+\infty}$ ou $\frac{+\infty}{+\infty}$ ou $\frac{-\infty}{-\infty}$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$ ou bien $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)$ prend la forme indéterminée $(+\infty-\infty)$

**Remarque**

- Pour calculer la limite en $x_0$ de $\frac{f}{g}$, il suffit de remarquer que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et d'utiliser les propriétés précédentes.
- Pour déterminer la limite en $x_0$ d'une fraction rationnelle $\frac{f}{g}$ telle que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, on peut mettre $(x - x_0)$ en facteur au numérateur et au dénominateur puis simplifier et calculer la limite lorsque $x$ tend vers $x_0$ de l'expression obtenue après simplification.

### 1.1.2 Limite d'un polynôme et d'une fonction rationnelle

**Propriété**

La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite en l'infini de son monôme du plus haut degré.

**Exemple** : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - 2x + 8 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

**Propriété**

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est égale à la limite en l'infini du quotient des monômes du plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

**Exemple :**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3+2x^2+1}{3x^2+x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{3x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x}{3} = +\infty$

**Consigne 1.6**

Calcule les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x)$ (b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3 - 2x + 7)$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-2x+1}{3x^5+x^3-1}$ (d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x+1}{3x^5+x^3-1}$

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

## 1.3 Dérivation

### 1.3.1 Dérivation en $x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$)

Codjo un élève de la classe après le cours sur les limites se propose de calculer $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où $f$ est la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4$ et $a$ un nombre réel.

**Information**

La fonction $T_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé **taux de variation de $f$ en $a$**

**Consigne 1.7**

Calcule $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ; $a = 2$

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

**Définition**

Soit $f$ une fonction numérique de la variable réelle définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant $a$. On dit que la fonction $f$ est dérivable en $a$ lorsque la limite du taux de variation de $f$ en $a$ est finie c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l, l \in \mathbb{R}$

Cette limite est appelée le nombre dérivé de $f$ en $a$ et on note $f'(a) = l$

**Retenons**

Etudier la dérivabilité d'une fonction $f$ en un réel $x_0$, revient à calculer la limite $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l, l \in \mathbb{R}$ alors on dit que $f$ est dérivable en $x_0$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$, alors on dit que $f$ n'est pas dérivable en $x_0$.

**Consigne 1.8 : Application**

Dans chacun des cas suivants, étudie la dérivabilité de $f$ en $x_0$

(a) $f(x) = 3x^2 + 2$ ; $x_0 = -2$

(b) $f(x) = \frac{x}{x-3}$ ; $x_0 = 2$

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.3.2 Dérivation sur un ensemble

**Définition**

Une fonction $f$ est dérivable sur un intervalle ouvert I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas la fonction dérivée de $f$ sur I notée $f'$ est définie par $\begin{matrix} f : I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{matrix}$ où $f'(x)$ est le nombre dérivée de $f$ en $x$.

**Propriété : Formule de dérivation des fonctions élémentaires**

| Fonction $f$ | $f$ est définie sur | $f$ est dérivable sur | Fonction dérivée $f'$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto k (k \in \mathbb{R})$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ |
| $x \mapsto x$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $1$ |
| $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $nx^{n-1}$ |
| $x \mapsto \frac{1}{x}$ | $\mathbb{R}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}_+$ | $\mathbb{R}_+^*$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

**Propriété : Formules de dérivation de la somme du produit et du quotient de deux fonctions dérivables**

| Fonction | Fonction dérivée |
|---|---|
| $x \mapsto kf (k \in \mathbb{R})$ | $kf'$ |
| $x \mapsto \sqrt{f}$ | $\frac{f'}{2\sqrt{f}}$ |
| $x \mapsto f + g$ | $f' + g'$ |
| $x \mapsto fg$ | $f'g + g'f$ |
| $x \mapsto \frac{1}{g}$ | $-\frac{g'}{g^2}$ |
| $x \mapsto \frac{f}{g}$ | $\frac{f'g - g'f}{g^2}$ |

**Remarque**

- Toute fonction polynôme est dérivable sur son ensemble de définition.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

**Consigne 1.9**

Détermine la dérivée de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé son ensemble de dérivabilité E.

$f(x) = 4x^2 - 3x + 7$ ; $g(x) = (3x^3 - 3x)^4$ ; $h(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$ ; $u(x) = \frac{x+3}{x+1}$ et $k(x) = (x + 3)(x^4 + 2x - 1)$

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.3.3 Tangente à une courbe en un point $x_0$

**Propriété**

Soit $f$ une fonction, (C) sa représentation graphique et $A$ un point de (C) d'abscisse $x_0$. Lorsque $f$ est dérivable en $x_0$, une équation de la tangente en $A$ à la courbe (C ) est :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

**Consigne 1.10**

Soit (C) la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto -x^3 + 2x - 1$

Détermine une équation de la tangente $(T)$ à la courbe (C) au point $A$ d'abscisse 1.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

## 1.4 Sens de variation – Extremum

### 1.4.1 Extremum

**Propriété**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $]a; b[$ et $x_0$ un élément de $]a; b[$.

Si $f'$ s'annule et change de signe en $x_0$, alors $f$ admet un extremum relatif en $x_0$.

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $m$ | ↗ | |

*$f$ admet un minimum relatif $m$ en $x_0$*

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $M$ | ↘ | |

*$f$ admet un maximum relatif $M$ en $x_0$*

### 1.4.2 Sens de variation

**Propriété**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $K$.

- Si $f'$ est positive sur K, alors $f$ est croissante sur K.
- Si $f'$ est négative sur K, alors $f$ est décroissante sur K.
- Si $f'$ est nulle sur K, alors $f$ est constante sur K.

**Remarque**

1. Pour étudier le sens de variation d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée.
2. Une fonction est dite monotone sur un intervalle I si elle est soit strictement croissante ou strictement décroissante.

**Consigne 1.11 : Application**

Soit $f$ la fonction définie par :

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$

1. Etudie le sens de variation de $f$ puis dresse son tableau de variation.
2. Précise les extrémums relatifs de $f$.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

## 1.5 Etude de quelques fonctions

### 1.5.1 Etude de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

**Consigne 1.12**

1. Etudie les variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ puis dresse son tableau de variation.
2. Trace la courbe représentative $(C_f)$ de $f$ dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.5.2 Etude de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$

**Consigne 1.13**

1. Etudie les variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{2}{x}$ puis dresse son tableau de variation.
2. Etudie les variations de la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{-2}{x}$ puis dresse son tableau de variation.
3. Trace dans un même repère orthonormé (O, I, J) du plan les courbes représentatives $(C_f)$ et $(C_g)$ des fonctions respectives $f$ et $g$.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.5.3 Etude de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

**Consigne 1.14**

1. Etudie les variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ puis dresse son tableau de variation.
2. Trace la courbe représentative $(C_f)$ de $f$ dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.5.4 Etude de la fonction $x \mapsto x^2$

**Consigne 1.15**

1. Etudie les variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2$ puis dresse son tableau de variation.
2. Trace la courbe représentative $(C_f)$ de $f$ dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

### 1.5.5 Etude de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$

**Propriété**

Soit $f$ une fonction de représentation graphique $(C_f)$.

La représentation graphique $(C_g)$ de la fonction $g : x \mapsto f(x - \alpha) + \beta$ est l'image de de $(C_f)$ par la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$

**Consigne 1.16**

On considère les fonctions $f$ et $g$ définie par $f(x) = 4x^2 + 2x - 12$ et $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$

1. Etudie les variations de $f$ puis dresse son tableau de variation.
2. Trace la courbe représentative de la fonction $f$.
3. Détermine le domaine de définition de la fonction $g$.
4. (a) Détermine les nombres réels $a$ et $b$ tels que $g(x) = a + \frac{b}{x-2}$.

   (b) Etudie les variations de $g$ puis dresse son tableau de variation.
5. Trace la courbe représentative de la fonction $g$.

**Stratégie : TI :... min TG :...min TC :...min**

**Retour et projection**

1. Qu'as-tu découvert sur la SA2 ?
2. Qu'as-tu appris de nouveau sur la SA2 ?
3. Qu'as-tu trouvé difficile, voire facile sur la SA2 ?
4. Qu'est-ce que tu as réussi ?
5. Qu'est-ce que tu n'as pas réussi ?
6. Qu'est-ce que tu vas faire pour améliorer ta production ?

**Fin de la SA N°2**